

РАЗДЕЛ № 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**Тема № 3. Решение многокритериальных задач.****Практическое занятие 3.1**

Тема практического занятия «Методы решения многокритериальных задач. Метод анализа иерархий».

Учебные вопросы:

1. Общая характеристика методов решения многокритериальных задач.
2. Общая характеристика метода анализа иерархий.
3. Шкала относительной важности.
4. Алгоритм обработки результатов экспертного опроса в методе анализа иерархий.

Рассмотрим пример многокритериальной задачи. Допустим, МЧС России необходимо выбрать самолет для покупки из некоторых возможных вариантов самолетов. Каждый из самолетов характеризуется множеством частных критериев, например:

W_1 – максимальная скорость;

W_2 – грузоподъемность;

W_3 – дальность полета без дозаправки;

W_4 – стоимость эксплуатации;

W_5 – вероятность возникновения аварийной ситуации.

Необходимо осуществить выбор одного варианта, оптимального по совокупности частных критериев.

Для решения этой задачи необходимо осуществить интегральную свертку, т.е. из пяти частных критериев W_1 , W_2 , W_3 , W_4 и W_5 необходимо сформировать единый критерий W . Для этого каждому из частных критериев необходимо поставить в соответствие «коэффициент важности». Для

отражения важности каждого критерия им необходимо приписать «вес» - α_i .

Сумма всех весов частных критериев должна быть равна единице: $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Тогда единый критерий будет иметь вид $W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \alpha_3 W_3 + \alpha_4 W_4 + \alpha_5 W_5$.

Метод анализа иерархий (далее – МАИ) применяется для решения многокритериальных задач и является систематической процедурой для иерархического представления элементов, от которых зависит выбор рационального решения. Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке суждений экспертов, которые должны определить рациональное решение.

В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (целей – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (как правило, это частные критерии или показатели, с помощью которых сравниваются элементы на нижнем уровне) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив).

В МАИ элементы на каждом уровне сравниваются попарно по отношению к каждому элементу верхнего уровня. С этой целью строятся матрицы $\|\beta_{ij}\|$ парных сравнений, которые являются квадратными и обратно симметричными с единичной главной диагональю (таблица 1).

При построении иерархии каждый элемент заданного уровня является критерием для сравнения всех элементов нижестоящего уровня.

При построении иерархии необходимо, чтобы элементы нижнего уровня иерархии были попарно сравнимы по отношению к элементам следующего уровня и т.д. вплоть до вершины иерархии.

Таблица 1 – Общий вид матрицы парных сравнений

$j = \overline{1, r}$ $i = \overline{1, r}$	1	2	...	r
1	1	β_{12}	...	β_{1r}
2	β_{21}	1	...	β_{2r}
...	...	...	1	...
r	β_{r1}	β_{r2}	...	1

где $\beta_{ij} = \frac{1}{\beta_{ji}}$, $\beta_{ii} = 1$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, r}$, r – число частных критериев либо

сравниваемых объектов.

Порядок применения МАИ проиллюстрируем на следующем примере (1).

Например, необходимо получить имеющие смысл ответы на вопросы типа: «Насколько дом А лучше дома Б или В по частному критерию окрестности?» или «Насколько по отношению к основной цели размеры дома важнее расположения к автобусным маршрутам?» и т.д.

Целью МАИ является получение приоритетов элементов на последнем уровне по отношению к вершине иерархии.

Для достижения этой цели необходимо построить матрицу для сравнения относительной важности частных критериев на втором уровне по отношению к общей цели на первом уровне (2).

Для проведения парных сравнений целесообразно использовать следующую шкалу (таблица 2).

Эта шкала оказалась эффективной не только во многих приложениях, ее правомочность доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами.

Таблица 2 – Шкала относительной важности

Интенсивность относительной важности	Определение
1	Равная важность элементов
3	Умеренное превосходство одного элемента над другим
5	Существенное или сильное превосходство одного элемента над другим
7	Значительное превосходство одного элемента над другим
9	Очень сильное превосходство одного элемента над другим
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения приоритетов
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного элемента с другим получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении второго элемента с первым получим обратную величину

Отметим, что по соглашению сравнивается относительная важность левых элементов матрицы с элементами наверху. Поэтому если элемент слева важнее, чем элемент наверху, то в клетку заносится положительное целое число (от 1 до 9); в противном случае – обратное число (дробь). Относительная важность любого элемента, сравниваемого с самим собой, равна 1; поэтому диагональ матрицы (элементы от верхнего левого угла до нижнего правого) содержит только единицы. Наконец, обратными величинами заполняются симметричные клетки, т.е. если элемент А воспринимается как «слегка более важный» (3 на шкале) относительно элемента Б, то считаем, что элемент Б «слегка менее важен» ($1/3$ на шкале) относительно элемента А.

Пусть члены семьи заполнили матрицу парных сравнений для 2-го уровня следующим образом (3). Например, на вопрос: какова важность размеров относительно удобства автобусных маршрутов по отношению к общей цели, члены семьи пришли к соглашению, что размеры существенно важнее, и поэтому они внесли цифру 5 в соответствующую клетку матрицы;

цифра $\frac{1}{5}$ автоматически заносится в симметричную относительно диагонали клетку, что соответствует противоположному сравнению.

Далее переходим к парным сравнениям элементов на нижнем уровне (4). Сравнимые попарно элементы – это возможные варианты выбора дома. Сравняется, насколько более предпочтителен тот или иной дом по каждому частному критерию второго уровня. Получаем восемь матриц суждений размерностью 3×3 , поскольку имеется восемь критериев на втором уровне и три дома, которые попарно сравниваются по каждому из частных критериев. Матрицы вновь содержат суждения членов семьи. Для того чтобы понять суждения, дадим краткое описание домов (5).

Итак, мы получили одну матрицу попарных сравнений для уровня 2 и восемь матриц для уровня 3.

На следующем этапе определяются локальные приоритеты, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня, т. е. для матрицы 2-го уровня расставляются приоритеты 8-ми частных критериев по отношению к общей цели – покупке дома.

Для этого необходимо вычислить множество собственных векторов для каждой матрицы, а затем нормализовать результат к единице, получая тем самым вектор приоритетов. Вычисление собственных векторов – довольно сложная и трудоемкая задача. Для приближенной оценки векторов приоритетов можно вычислить геометрическое среднее. Это можно сделать, перемножая элементы в каждой строке и извлекая корни n -ой степени, где n – число элементов.

$$\beta_i = \sqrt[r]{\prod_{j=1}^r \beta_{ij}} ,$$

где r – число элементов.

Например. Если у нас матрица 4×4 , то оценка собственного вектора первой строки определяется из выражения (6)

На следующем этапе необходимо нормализовать результат, получив тем самым вектор локальных приоритетов. Для нахождения нормальных оценок собственного вектора матрицы парных сравнений второго уровня β_{Ni} используем следующую формулу

$$\beta_{Ni} = \frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^r \beta_i}.$$

На следующем шаге осуществляется проверка согласованности мнений экспертов на основе вычисления индекса компетентности (*ИК*) и отношения компетентности (*ОК*). ИК определяется из выражения

$$ИК = \frac{\lambda_{\max} - r}{r - 1},$$

где $\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^r \lambda_i,$

$$\lambda_i = \beta_{Nj} \sum_{i=1}^r \beta_{ij}, \text{ при } j = i, i = \overline{1, r}.$$

Применительно к симметричной матрице всегда соблюдается условие $\lambda_{\max} \geq r$. При абсолютной согласованности матрицы $\lambda_{\max} = r$.

Для определения *ОК* необходимо *ИК* разделить на число, соответствующее случайной согласованности матрицы такого же порядка, что и анализируемая. В таблице 3 приведены значения случайной согласованности (*СС*) для случайных матриц различного порядка.

Таблица 3 – Значения случайной согласованности для матриц разного порядка

Размер матрицы	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность (<i>СС</i>)	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В случае если величина OK не превышает 0,2, то полученные значения нормальных оценок вектора локальных приоритетов считаются достаточно согласованными. Иначе экспертам следует тщательно проверить и уточнить назначенные ими предпочтения или их мнения не будут использованы.

В общем виде исходные данные и результаты решения задачи по определению локальных приоритетов и их согласованности представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Общий вид исходных данных и результатов решения задачи

$j = \overline{1, r}$ $i = \overline{1, r}$	1	2	j	r	β_i	β_{Ni}	Определение λ_i и $\lambda_{\max}$
1	1	β_{12}	...	β_{1r}	β_1	β_{N1}	λ_1
2	β_{21}	1	...	β_{2r}	β_2	β_{N2}	λ_2
i	...	...	...	...	...	...	...
r	β_{r1}	β_{r2}	...	β_{rr}	β_r	β_{Nr}	λ_r
Сумма	$\sum_{i=1}^r \beta_{i1}$	$\sum_{i=1}^r \beta_{i2}$	$\sum_{i=1}^r \beta_{ij}$	$\sum_{i=1}^r \beta_{ir}$	$\sum_{i=1}^r \beta_i$	$\sum_{i=1}^r \beta_{Ni}$	$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^r \lambda_i$

На следующем этапе необходимо синтезировать приоритеты, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент: каждый элемент второго уровня умножается на единицу, т.е. на вес единственной цели самого верхнего уровня. Это дает составной или глобальный приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему как к критерию и

расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня.

Задание на самоподготовку.

Повторить материалы практического занятия и подготовиться к ответам на следующие вопросы:

а) основные правила заполнения экспертами матрицы попарных сравнений в методе анализа иерархий;

б) основное отличие правил заполнения экспертами матрицы в методе анализа иерархий и в методе парных (попарных) сравнений;

основные этапы

в) особенности шкалы относительной важности сравниваемых объектов в методе анализа иерархий;

г) основные этапы обработки матрицы попарных сравнений в методе анализа иерархий;

Список литературы для углубленного изучения материалов практического занятия

1. Исследование систем управления: практикум: в 2-х ч./ Академия гражданской защиты МЧС РФ, Кафедра информационных технологий и систем управления; под ред.: В. И. Мухина, А. С. Малина. - Новогорск: АГЗ МЧС РФ Ч. 2. - 2004. - 124 с. [стр.117 – 124].

2. Маслихина, В.Ю. Методы принятия управленческих решений: учебное пособие / В.Ю. Маслихина; Поволжский государственный технологический университет. - Йошкар-Ола: ПГТУ, 2016. - 228 с. [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459492>. [стр. 116 – 122].

3. Теория систем и системный анализ: учебник для бакалавров/ В. Н. Волкова, А. А. Денисов. - 2-е изд., перераб. и доп.. - М.: Юрайт, 2013. - 616 с. [стр. 422 – 425].